איתמר פיטובסקי

גבולות החישוב וגבולות ההצרנה

לזיכרו של יוסי הדר

השלד של מאמר זה נמסר כהרצאה בכנס שנערך במכללת תל-חי ביולי 1998. בבואי להשלים את הדברים עליהם רק רמזתי ולנמק את טענותי שנמסרו אקס-קתדרה, תפח המאמר לממדיו הנוכחיים.

במאמר מובאות כמה וכמה דוגמאות מן ההיסטוריה של הפילוסופיה, אולם אין לי יומרה היסטוריוגרפית. אמנם, ככל הידוע לי, העובדות ההיסטוריות נמסרות כהוויתן, אך בחירת העובדות נועדה לשרת מטרה פילוסופית.

א. דיקארט מחלץ כמתים

מקצת הפעולות שאנו מבצעים במחשבתנו שקולות לתהליכים מכניים לחלוטין, שאינם דורשים כוונה או הבנה. פעולות חשבון כמו כפל או חיבור הן דוגמה אופיינית. אנו יכולים לבצע אותן במחשבתנו או באמצעות מכונות חשבון מכניות או אלקטרוניות והתוצאה זהה. למכונות חשבון קשה לייחס הבנה כוונה או ידיעה.

תהליכי חשיבה שיש פעולה מכנית השקולה להם בתוצאתה אינם מצטמצמים בפעולות חשבוניות. כבר אריסטו ידע כי לחלק מן הפעולות הלשוניות יש אופי כזה. דוגמה לכך

היא הטיעון שבו אנו מסיקים כי "סוקרטס הוא בן תמותה" מן ההנחות "כל בני האדם בני תמותה" ו"סוקרטס הוא בן אדם". המסקנה, כמובן, איננה תלויה בהבנתנו את המושג "אדם" או "בן תמותה" או בהכרתנו את השם "סוקרטס", והיא תוצאה אוטומטית מן המבנה התחבירי: מתוך ההנחות "כל מה שהוא A הוא B" ו-"a הוא A" הסק כי "a הוא B". קל לבנות מכונה שיש לה אמצעי לזיהוי סימנים בשפה וזיהוי סוגי סימנים (נניח אותיות גדולות וקטנות) שתוכל להסיק מסקנות מסוג זה.

כידוע אריסטו חקר היסקים מטיפוס זה, סילוגיזמים, גילה קבוצה בסיסית של היסקים תקפים כאלה, ואף הוכיח מעין "משפט שלמות" לפיו כל סילוגיזם תקף מתקבל כשרשרת של היסקים בסיסיים. ההישג הזה היווה את עמוד השדרה של הלוגיקה עד מחצית המאה התשע-עשרה.

אולם לא כל מה שנכלל במסגרת המתמטיקה הקלאסית נראה כשקול לפעולה מיכאנית. כך, הגיאומטריה האוקלידית נתפסה במהלך דורות רבים כתחום הדורש יותר מכושר חישובי. בסמינרים תיאולוגיים נלמדה הגיאומטריה כ"מכשיר לחידוד השכל" בעוד איש לא התייחס כך אל האריתמטיקה. לתחושה החזקה הזו שהגיאומטריה דורשת דבר-מה נוסף, "אינטואיציה מרחבית", שותפים תלמידי חטיבת הביניים הלומדים אותה לראשונה. לפתע נתקלת התלמידה בבעיות כמו: "הוכיחי כי שלושה התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת". התלמידה מפשפשת במה שהיא יודעת ולא נראה כי יש איזו שיטה או מהלך המבטיח מראש את התרת הבעיה. כל המתמטיקה שנתקלה בה עד עתה התבססה על שינון והפעלה של אלגוריתמים (לפעולות חשבון ופתרון משוואות אלגבריות פשוטות). הפעם נראה שהדרך היחידה לפעול היא לנסות באקראי מיני בניות עזר בתקווה שמשהו יתבהר.

הרעיון שהוכחת טענות בגיאומטריה (מתוך האקסיומות) דורשת "אינטואיציה מרחבית" היא אבן יסוד במיטאפיסיקה של קאנט. בקטע מפורסם מ'ביקורת התבונה הטהורה' הוא משווה בין הפילוסוף, שעניינו ניתוח והבנת מושגים, ובין הגיאומטריקן.

> הבה ניתן לו לפילוסוף את מושג המשולש ונניח בידיו לברר, לפי דרכו, כיצד יתייחס סכום זוויותיו לזווית ישרה. אין לו אלא מושג של תבנית המותחמת בשלושה קווים ישרים, ובה מושג של אותו מספר הזוויות. והנה, יהרהר במושג זה כדרך שיהרהר - לא יפיק כל מאומה שיהא חדש. בידו לנתח ולברר את מושג הקו הישר, או של זווית, או של המספר שלושה, אך לא יהא בידו להגיע לתכונות אחרות, שאינן טמונות כלל במושגים אלה. אך ייזקק לשאלה זו הגיאומטר - מיד הוא מתחיל לבנות את המשולש. לפי שהוא יודע, כי שתי זוויות ישרות יחד סכומן בדיוק כסכום כל הזוויות המצרניות ביחד, שאפשר למתחן מנקודה אחת על הקו הישר - הרי הוא מאריך צלע אחת של משולשו ומקבל שתי זוויות מצרניות, השוות ביחד לשתי זוויות ישרות. והנה הוא מחלק את הזוויות החיצוניות מתוך שהוא מותח קו במקביל לצלע המשולש שממול, והוא רואה, שכאן נוצרת זווית מצרנית חיצונית, השווה לזווית פנימית, וכו'. בדרך זו הוא מגיע על ידי שלשלת של היקשים, כשהוא מודרך תמיד על ידי ההסתכלות, לפתרון השאלה, המתקבל על הדעת לגמרי והוא כללי כאחת.[1]

הסיבה שהפילוסוף נכשל בגיאומטריה היא בכך שהוא עוסק בהיקשים הנובעים מן המושגים עצמם, כלומר בהיקשים לוגיים בלבד. הגיאומטריקן מצליח במקום שבו נכשל הפילוסוף כיוון שהוא "מודרך תמיד על ידי ההסתכלות". נדגיש, קאנט איננו טוען רק שאנו זקוקים לאינטואיציה גיאומטרית, ו"אופן הסתכלות", כדי לנסח את ההנחות (האקסיומות) של הגיאומטריה. מעל ומעבר לכך אנו זקוקים לאינטואיציה כדי להוציא לפועל הוכחות של משפטים מן האקסיומות:

> מה עשויה להיות הסיבה למצבים כל כך שונים, שבהם שרויים שני אמני-התבונה, שמהם האחד הולך בדרכו לפי מושגים, והאחר - לפי הסתכלויות, שהוא מגלמן אפריורי במתאים למושגים? לפי העקרונות הטראנסצינדנטאליים, שהוסברו קודם, ברורה סיבה זו. אין כאן המדובר במשפטים מנתחים, שאפשר ליצרם על ידי ניתוח בלבד של המושגים (כאן, ללא ספק, תהיה ידו של הפילוסוף על העליונה לעומת יריבו), אלא מדובר במשפטים מרכיבים, שהכרתם תהיה אפריורי. כי, אין אני צריך ליתן את דעתי, על שום מה אני חושב ממש במושגי על המשולש (זה אינו אלא הגדרה בלבד); אדרבה, עלי לעבור מכאן לתכונות, שאינן מונחות במושג זה, ובכל זאת שייכות אליו. (עמ' 358)

אותן תכונות של המשולש "שאינן מונחות במושג זה, ובכל זאת שייכות אליו" אינן נובעות לוגית מן האקסיומות ועל כן "בכדי הייתי מתפלסף על המשולש, דהיינו, חושב עליו באורח היקשי, שעל ידי כך לא אתקדם במאומה מעבר להגדרה בלבד" (שם). ואמנם כל מטרתה של דוגמה זו, אומר קאנט, "היא להסביר מה גדול ההבדל בין השימוש ההיקשי בשכל לפי מושגים לבין השימוש ההסתכלותי על ידי בנין המושגים" (שם).

ישנו הבדל ניכר בין השימוש הנאיבי במושג "אינטואיציה" שיחסנו לתלמידה בחטיבת הביניים, ובין השימוש הפילוסופי במונח זה אצל קאנט. אבל לשני שימושים אלה יש גרעין משותף, שלילי. גם התלמידה הנבוכה וגם קאנט מניחים כי הכושר להוכיח טענות בגיאומטריה מן האקסיומות איננו מצטמצם ביכולת לוגית חישובית. כדי להצליח במשימה זו צריך, כביכול, דבר-מה נוסף חמקמק.

ישנן כמה סיבות לעמדה הקאנטיאנית בנוגע למעמדן של הוכחות בגיאומטריה, המנוגדת כל כך לתפיסתנו העכשווית. על חלק מסיבות אלה נעמוד מאוחר יותר.[2] כאן

נעיר רק כי בניגוד לתלמידה הנבוכה בחטיבת הביניים לקאנט היה מידע רלוונטי שממנו בחר להתעלם! מאה וחמישים שנה לפני שפירסם את השורות שצוטטו לעיל[3] הראו דיקארט ופרמה שכדי להוכיח טענות בגיאומטריה ודאי שאין צורך באינטואיציה מרחבית ספציפית, ואולי אין צורך באינטואיציה כלל, כי גם מחשב יכול למצוא הוכחות כאלה.

דיקארט ופרמה גילו במקביל את הגיאומטריה האנליטית, אולם רק אצל דיקארט מתלווית התגלית בהכרה המפורשת, והמבוססת פחות או יותר, כי מדובר בשיטה כללית היכולה להכריע כל טענה גיאומטרית. דיקארט פותח את דבריו בהדגמה של הרדוקציה של הגיאומטריה לאלגברה על ידי כתיבת המשוואות המתיחסות לישרים ומעגלים ומציאת נקודת החיתוך בין שני ישרים ובין ישר למעגל. הוא מביא כמה דוגמאות מלוות בציורים ואומר:

> "הבאתי [דוגמאות] פשוטות מאד אלה כדי להראות כי נדרש רק מעט מעבר לנתון בשרטוטים אלה, שאת משמעם הבהרתי, כדי לבנות את כל הבעיות של הגיאומטריה הרגילה. זהו עניין שאני מאמין שהמתמטיקאים מן הזמן העתיק לא עמדו עליו, אחרת לא היו טורחים לכתוב כל כך הרבה ספרים שבהם סדרת הטענות מראה שלא היתה להם שיטה בדוקה למצוא את כולן, אלא שאספו יחדיו את אותן אמיתות שבהן נתקלו בדרך המקרה".[4]

ה"גיאומטריה הרגילה" שדיקארט מתיחס אליה בקטע זה היא גיאומטריית המישור של מעגלים וישרים, התופסת חלק ניכר מעבודתו של אוקלידס. דיקארט מקדיש לה שמונה-עשרה עמודים בלבד, ואילו רוב ספרו מוקדש לגיאומטריה של חתכי החרוט ועקומים אחרים. מן הראוי להדגיש את החשיבות הגדולה של טענת דיקארט בשורות

האלה. להישג הגדול של גילוי הגיאומטריה האנליטית הוא מוסיף טענה מרחיקת לכת, בעלת אופי מטא-מתמטי: השיטה האנליטית מסוגלת להכריע את כל הפסוקים של הגיאומטריה הרגילה. זו הפעם הראשונה שמישהו מנסה לאפיין באופן גורף את כל האמיתות בתחום דיון מתמטי אינסופי, ויותר מכך לתת אלגוריתם למציאתם!

בחלק הראשון של הספר דיקארט מתאר בפירוט את האלגוריתם. כיוון שהגיאומטריה הרגילה עוסקת בנקודות ישרים ומעגלים, הרי שכדי לאפיין אותם ביחידות מספיק לדעת את אורכם של קטעים מסוימים. בניסוח המודרני נקודה נקבעת על ידי הקואורדינטות שלה (מרחקיה מן הצירים), ישר נקבע על ידי שתי נקודות, ומעגל על ידי נקודת המרכז ואורך הרדיוס.[5] כל בעיה בגיאומטריה מסתכמת אפוא ביכולתנו למצוא את ארכיהם של קטעים:

> לכן אם ברצוננו לפתור בעיה כלשהי, נניח כי הבעיה כבר מצאה את פתרונה וניתן שמות לכל [אורכי] הקטעים הנדרשים לבנייתה - לאלו הנעלמים ולאלה שהם ידועים [נתונים]. אז, בלי להבדיל בין הקטעים הידועים והנעלמים עלינו להתיר את הבעיה בכל דרך שתייצג בטבעיות את היחסים בין [אורכי] הקטעים השונים, עד שנמצא אפשרות ליצג גודל אחד בשתי דרכים. כן נקבל משוואה, כיוון שהרכיבים של ביטוי אחד שווים לרכיבים של האחר.
>
> עלינו למצוא משוואות במספר השווה לזה של הנעלמים, אבל אם לאחר ששקלנו את כל המרכיבים איננו מוצאים מספיק משוואות, ברור שהבעיה איננה מוכרעת לחלוטין. במקרה זה נוכל לבחור קטע באורך שרירותי לכל נעלם שלא מתאימה לו משוואה. (שם, עמ' 8)

על כן, השיטה הקרטזיאנית מורכבת משני שלבים: (1) המרת כל בעיה ב"גיאומטריה רגילה" במערכת משוואות. (2) פתרון המשוואות. כיוון שגיאומטריה רגילה עוסקת בישרים ובמעגלים, הרי כל שעלינו לעשות כדי להתיר כל בעיה הוא למצוא דרך לחשב

את נקודות החיתוך (אם קיימות) בין ישרים לישרים, בין מעגלים לישרים ובין מעגלים למעגלים. בשלב הראשון אנו כותבים מספר משוואות כמספר האובייקטים (ישרים ומעגלים) בהם מדובר בין שהפרמטרים שלהם ידועים ובין שנעלמים. אחר כך אנו מחלצים את הנעלמים על ידי פתרון המשוואות. כל משוואה היא לכל היותר מן המעלה השנייה, אבל בהינתן בעיה מורכבת מתקבלות בדרך כלל כמה משוואות ממעלה ראשונה ושנייה בכמה נעלמים.

דיקארט מתאר כיצד לדעתו יש לפתור מערכת משוואות כזו על ידי חילוץ והצבת נעלמים. תהליך כזה מביא בדרך כלל לכך שמעלת המשוואות שמדובר בהן עולה ושוב איננו עוסקים רק במשוואות מן המעלה השנייה אלא במשוואות ממעלה כלשהי. כאן דיקארט שוגה בשיטתו מפני שהוא מניח כי בכל שלב, עד הסוף, ניתן להביע כל אחד מן הנעלמים באמצעות פעולות אלגבריות והוצאת שורשים על הפרמטרים הידועים והנעלמים האחרים. במקרה של משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ שבה a,b,c ידועים ו- x נעלם אפשר כידוע להביע כך את x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

פתרון כזה קרוי "פתרון באמצעות רדיקלים" ונוסחאות דומות קיימות למשוואות ממעלה שלישית ורביעית. דיקארט מניח בטעות כי יש שיטה כזו לכל משוואה, ממעלה כלשהי, אבל זו טענה מופרכת. למשוואות ממעלה חמישית ומעלה אין בדרך כלל פתרון ברדיקלים. דיקארט כמובן לא יכול היה לדעת עובדה זו שהוכחה רק בתחילת המאה התשע-עשרה! על כל פנים, טעותו של דיקארט בנקודה זו ניתנת לתיקון. כדי להוציא לפועל פרוצדורה דומה לזו של דיקארט מספיק לקבל פתרונות מקורבים כרצוננו למערכת המשוואות האלגברית. שיטות קירוב כאלה קיימות מקדמא דנא ובמאה

העשרים הן נוצלו לכתיבת אלגוריתמים להכרעת כל טענה גיאומטרית, בשיטה המבוססת במידה רבה על הסכמה המקורית של דיקארט.[6] על כך נרחיב מעט להלן.

נשים לב כי דיקארט מדבר כאן על "בעיות" או "בניות" ופתרונן ולא על "הוכחות". אמנם להשקפתו ישנו הבדל בין שתי הקטגוריות הללו. הוכחה, במובן האוקלידי, היא לטעמו של דיקארט יצור בעל מעמד משני, שמטרתו בעיקרה דידקטי, לשכנע אחרים באמיתות תגליותיו. לעומת זאת, את שיטתו תפס דיקארט כשיטת גילוי של אמיתות גיאומטריות וכאמור עמד על כך שניתן בעזרתה למצוא את כולן.[7] כמובן אבחנה זו איננה תופסת כיום ואין סיבה שלא לראות בפרוצדורות הגילוי של דיקארט הוכחות משכנעות. הבה נראה ביתר פירוט כיצד מתבסס הקשר בין הגישה האוקלידית ("הישנה") והשיטה האנליטית ("החדשה") במסגרת הלוגיקה המודרנית. כך נוכל להבין גם ביתר עמקות איך מחשב יכול להוכיח טענות גיאומטריות.

הגיאומטריה האוקלידית הרגילה דנה כאמור בנקודות ישרים ומעגלים וביחסים ביניהם. בבואנו להצרין מערכת זו עלינו להחליט אילו יחסים ייחשבו לפרימיטיביים ואילו לנגזרים . כך למשל אפשר לקחת את היחס הדו מקומי "נקודה נמצאת על הישר" כיחס פרימיטיבי או את היחס התלת מקומי "הנקודה y נמצאת בין x ל- z " כיחס פרימיטיבי. לכל יחס פרימיטיבי מתאים סימן בשפה הפורמלית וקבוצת היחסים הפרימיטיביים היא כמובן סופית. בשלב הבא עלינו לנסח מערכת אקסיומות שיחסים אלה מקימים. מערכת אקסיומות שלמה כזו ניתנה על ידי הילברט בתחילת המאה.[8] היא כוללת עשרים אקסיומות, הרבה יותר מחמש הפוסטולטים של אוקלידס. הסיבה לכך היא שבמערכת האוקלידית המקורית מובלעות הנחות שבהן משתמשים בקביעות במהלך הוכחות מבלי לציין זאת בפירוש.[9]

נניח לצורך ההדגמה כי בין היחסים הבסיסיים בהם אנו משתמשים נמצא סימן היחס התלת מקומי $L\ (x, y, z)$ שמשמעותו המכוונת היא: "הנקודות x, y, z נמצאות על ישר אחד" וסימן היחס הארבע מקומי $D(x, y; z, w)$ שמשמעותו המכוונת היא: "המרחק בין הנקודות x ל- y שווה למרחק בין z ל- w" (אין כמובן שום הכרח להשתמש ביחסים אלו דווקא והם כאמור מובאים לצורך הדגמה). בהינתן שתי נקודות שונות b, c אנו רוצים לציין את הנקודה במרכז הקטע המחבר אותם. בתחשיב היחסים נתייחס אל הנקודה הזו באמצעות הכמת הישי "ישנו x על הישר המחבר את b עם c שמרחקו מ- b שווה למרחקו מ- c", או בנוסחה

$$\exists x L(b,x,c) \& D(b,x;x,c) \quad (1)$$

את העובדה שישנו x כזה ניתן להוכיח מן האקסיומות, אבל שפת הגיאומטריה ה"ישנה" איננה מאפשרת לנו לומר במפורש מהו x זה. ליתר דיוק היא איננה מאפשרת לנו להביע את נקודת המרכז x כפונקציה של נקודות הקצה a ו-b. עובדה זו איננה מגבילה את כושר הביטוי, שהרי המערכת של הילברט היא שלמה וניתן לנסח ולהוכיח בה כל אמת גיאומטרית. בעצם, לפנינו מצב טיפוסי לתחשיב היחסים. השימוש בכמת הישי מאפשר לנו להתייחס לאובייקטים שאין להם בהכרח ייצוג מפורש בשפה.

באופן דומה נוכל לנסח את הטענה שהביכה את תלמידת חטיבת הביניים: "שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה". אם a, b, c קדקודי משולש (כלומר הם אינם נמצאים על ישר אחד) נאמר זאת כך: ישנה נקודה w שהיא על הקטע המחבר את a עם מרכז bc, ועל הקטע המחבר את b עם מרכז ac, ועל הקטע המחבר את c עם מרכז ab"
או בנוסחה

$$\begin{aligned}&\exists x \exists y \exists z \exists w L(b,x,c) \& D(b,x;x,c) \& L(a,y,c) \& D(a,y;y,c) \\ &\& L(a,z,b) \& D(a,z;z,b) \& L(a,w,x) \& L(b,w,y) \& L(c,w,z)\end{aligned} \quad (2)$$

העובדה שניסחנו את הטענה בשפה פורמלית איננה עוזרת לנו כמובן להוכיח אותה.

נעבור לגיאומטריה ה"חדשה" בנוסח דיקארט. כעת נקודות מתפרשות כזוגות של מספרים ממשיים. למען הקיצור נשתמש בסימון וקטורי שבו האות a מסמנת זוג מספרים $a=(a_1,a_2)$. בין הנקודות מוגדרות פעולות אלגבריות. אם $b=(b_1,b_2)$ אז $a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ ואם r היא מספר ממשי אז $ra=(ra_1,ra_2)$.

המרחק בין שתי נקודות a, b נתון על ידי $d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

אם b ו- c הן זוג נקודות, מרכז הקטע המחבר אותן הוא $\frac{1}{2}(b+c)$. עובדה זו ניתן לגזור במפורש (ובאופן טריביאלי) מן המשוואות. נניח כי x היא הווקטור הנעלם המציין את מרכז הקטע ונניח כי t הוא מספר ממשי נעלם. משוואה אחת מציינת את העובדה ש- x הוא על הישר המחבר את b ו- c, *כלומר* b, x, c מקיימים את היחס *L(b, x, c)*

(3) $x=ta+(1-t)b$

משוואה שנייה מצינת את העובדה שהמרחק מ- b ל- x שווה למרחק מ-x ל- c,כלומר מתקיים היחס *D (b,x;x, c)*:

(4) $d(b,x)=d(x,c)$

פתרון משוואות (3), (4) הוא $x=\frac{1}{2}(b+c)$, $t=\frac{1}{2}$. מכאן שאם אנו רוצים להצביע על מרכז הקטע נוכל לכתוב:

$$L(b,\tfrac{1}{2}(b+c),c)\&D(b,\tfrac{1}{2}(b+c);\tfrac{1}{2}(b+c),c) \qquad (5)$$

נוסחה (5) שקולה לנוסחה (1) אבל אין לנו עוד צורך בכמתים. העובדה שאנו מפרשים את הנקודות כווקטורים שביניהם מוגדרות פעולות אלגבריות מאפשרת לנו לבטא את

מרכז הקטע כפונקציה של הקצוות ולהיפטר מן הכמת הישי. פעולה זו נקראת חילוץ כמתים. מתן הפשר האלגברי ליחסים הגיאומטריים מאפשר פרוצדורה זו. באופן דומה אם נציב במשולש a,b,c את מרכזי הקטעים $x=\frac{1}{2}(b+c), y=\frac{1}{2}(a+c), z=\frac{1}{2}(a+b)$ אזי קל לראות כי נקודת מפגש התיכונים היא $\frac{1}{3}(a+b+c)$. הצבת ערכים אלה ב- (2) מאפשרת להשמיט את הכמתים, ולקבל נוסחה חסרת כמתים השקולה לה. הטענה כי שלושה התיכונים נפגשים בנקודה אחת הופכת טריביאלית (פשוט מציינים מהי הנקודה).[10]

הענין הוא אפוא זה: מתן הפשר האלגברי לאובייקטים בגיאומטריה מאפשר לבטא את אמיתות הגיאומטריה באמצעות נוסחאות חסרות כמתים. כל נוסחה כזו היא בעצם משוואה אלגברית שניתן לפתור בשיטות שונות. זוהי הסכמה הכללית המאפשרת כתיבת תכנית מחשב שתכריע כל טענה בגיאומטריה.[11] הפרטים המתמטיים אינם פשוטים אבל התיאור הזה מספיק לצרכינו.

כאן המקום לעמוד על נקודה מהותית. דיקארט איננו טוען טענה פסיכולוגית. הוא איננו גורס שאנו כבני אדם חושבים ב"אופן טבעי" על גיאומטריה במונחים אלגבריים. הוא אף אינו טוען שכאשר אנו, כיצורי אנוש, מנסים להוכיח טענה גיאומטרית אנו משתמשים באלגברה באופן לא מודע. הטענה שלו היא מתמטית ומורכבת משני חלקים: ראשית, הגיאומטריה היא בעצם אלגברה; היחסים הגיאומטריים האיכותיים בין נקודות, ישרים ומעגלים הם בעצם הסוואה ליחסים כמותיים בין גדלים אלגבריים (מספרים זוגות מספרים משוואות). שנית, האפיון האלגברי מאפשר להכריע כל פסוק בגיאומטריה, היינו להוכיח את אמיתותו כאשר הוא אמיתי, ולהוכיח את שלילתו כשהוא שקרי.

עד כמה הטענה הראשונה של דיקארט היא עמוקה נתברר במשך הדורות שלאחריו. לדוגמה, נניח כי אנו מוותרים על חלק הארי של הגיאומטריה, ונשארים רק עם נקודות, ישרים והיחסים הבסיסיים "נקודה נמצאת על ישר" ו"שני ישרים מקבילים", והאקסיומות המתאימות. הגיאומטריה המדוללת הזו נקראת "גיאומטריה אָפִינִית" ומתברר שגם היא איננה בעצם אלא הסוואה למבנה אלגברי הנמצא בה בהכרח. כל גיאומטריה אפינית מושרית על ידי מרחב וקטורי.[12]

הטענה השניה של דיקארט נתבררה סופית כנכונה במאה העשרים. כאמור, כל ההוכחות המודרנית הם שיפורים טכניים, חשובים ככל שיהיו, של תובנה מן המאה השבע-עשרה.

ב. גבולות החישוב והתיזה של צ'רץ'-טיורנג

העובדה שיש דרך אלגוריתמית להכרעת כל טענה בגיאומטריה מעלה את השאלה עד כמה אפשר להרחיב תגלית זו לשאר ענפי המתמטיקה, או אף לחלקים אחרים של המחשבה. בעניין זה אנו מוצאים התבטאויות שונות במשך הדורות אשר לחלקן אופי קומי במקצת. כך, למשל, לייבניץ חלם למצוא את התחשיב הלוגי האולטימטיבי "קרקטריסטיקה אוניברסליס" שעל אודותיו הוא אומר:

> אילו היתה לנו [שפת הקרקטרסטיקה אוניברסליס] היינו יכולים לדון במטאפיסיקה ובמוסר באותו אופן שבו אנו דנים בגיאומטריה ובאנליזה... אם אי הסכמה בעניינים אלה היתה מתגלית לא היה שוב צורך בשקלא וטריא בין פילוסופים כפי שאין צורך בדיון מעמיק בין רואי חשבון. מספיק היה [שהפילוסופים] יקחו בידיהם את העפרונות, יישבו אל שולחנותיהם (כאשר חבר שלישי נמצא שם כעד, אם רצונם בכך) ויאמרו איש לרעהו: 'הבה נחשב'.[13]

אילו כל ענייני אנוש היו ניתנים להכרעה אלגוריתמית החיים היו קלים יותר אם גם משעממים למדי. על כל פנים נראה כי אין הדבר כך ועל כן שאלת התיחום בין מה שניתן לחישוב למה שאיננו ניתן היא בעלת משמעות. מובן שהנטיה הטבעית היא לנסות ולהרחיב את הפרוגרמה הקארטזיאנית אל שאר ענפי המתמטיקה, בראש ובראשונה הענף הקלאסי השני בנוסף על הגיאומטריה, תורת המספרים. תורה זו עוסקת גם בשאלות הפשוטות של האריתמטיקה, דוגמת "כמה הם 92 X 37?" שהן בעליל ניתנות להכרעה חישובית, אבל גם בשאלות סבוכות בהרבה הדנות בקבוצות אינסופיות של מספרים טבעיים. לדוגמה הטענה הזו: "כל מספר זוגי גדול מ- 2 הוא סכום של שני מספרים ראשוניים". זוהי השערת גולדבך מ- 1742 שאיש אינו יודע להוכיח או להפריך עד עצם ימינו אלה. טבעי אפוא לשאול ביחס לאריתמטיקה את השאלה הזו: האם קיים אלגוריתם אשר בהינתן לו טענה בתורת המספרים כקלט, יכריע אם טענה זו אמיתית או שקרית (לאחר מספר סופי של צעדי חישוב).

שוב נחזור ונדגיש שאין זו שאלה בעלת משמעות פסיכולוגית. איננו מתעניינים בשאלה מה קורה בפועל לאנשים "בראש" שעה שהם עוסקים בתורת המספרים, מחשבים חישובים, מנסים להוכיח טענות וכד'. השאלה היא האם יש מערכת חישובית אשר תכריע אמיתות של טענות באריתמטיקה בשיטה כלשהי, אפילו כזו המנוגדת לאינטואיציה האנושית.

שאלה דומה לזו הועלתה על סדר היום של המתמטיקאים בתחילת המאה העשרים. הילברט, אותו כבר הזכרנו, נשא אז הרצאה לפני באי הקונגרס העולמי למתמטיקה והעמיד בפני שומעיו רשימת בעיות שנראו לו החשובות והדחופות ביותר. אחד הסעיפים בבעיה הראשונה היתה השאלה שלעיל.

מן הראוי לציין כי בראשית המאה, בזמן ההרצאה, לא היתה שאלת ההכרעה של אמיתות האריתמטיקה מנוסחת באופן מתמטי מדויק. בדיון ההוא לא היתה עדיין הגדרה מדויקת של המושגים "אלגוריתם", "פרוצדורה אפקטיבית", "שיטה קונסטרוקטיבית" וכיוצא בזה. הילברט פנה אל השומעים והסתמך על אינטואיציה שהיתה משותפת להם. הרי במשך אלפי שנה אנשים המציאו והשתמשו באלגוריתמים לצרכי חישובים שונים ומשונים גם בלי שהיה למושג הגדרה מדויקת. (בדיוק כפי שאנשים השתמשו בכללי ההיסק של הלוגיקה המודרנית גם לפני ניסוחה באופן פורמלי). אם יש אלגוריתם להכרעת האריתמטיקה, ואם מישהו יציג אותו בפנינו, הרי שנזהה אותו ככזה גם ללא הגדרה מדויקת של המושג הכולל.

אבל מה אם התשובה שלילית? מה אם אין אלגוריתם המכריע לגבי כל פסוק נתון באריתמטיקה אם הוא אמיתי או שקרי? אם אנו סבורים שזה המצב, כפי שאמנם התברר, עלינו לאפיין את קבוצת כל האלגוריתמים האפשריים ולהראות שאף איבר בקבוצה זו לא יצלח.

הגדרת המושג אלגוריתם אינה כמובן עניין שרירותי (בכלל הטענה כי הגדרות הן "שרירותיות" מקורה בטעות). מצד אחד, עלינו למצוא אותם המאפיינים המהותיים של כל אלגוריתם שאנו מכירים אינטואיטיבית ומתוך דוגמאות לאינספור. מצד שני, עלינו להקפיד שלא להרחיב מדי, ולכלול בהיסח הדעת מיני "פרוצדורות" שאינן חישוביות כלל. במהלך שנות השלושים ניתנו כחמש הגדרות וברבות השנים, עד ימינו נוספו עליהן כמה מאות! כל ההגדרות נמצאו שקולות זו לזו, למרות שהאינטואיציות בבסיסן והמניעים של בעליהן שונים ומשונים.

את ההגדרה השקופה ביותר נתן טיורינג במאמר משנות השלושים,[14] והיא משמשת עד היום כנקודת מוצא בדיונים במדעי המחשב. טיורינג זיהה כל אלגוריתם עם מכונה (דמיונית) שיש בה שני חלקים:

1. זיכרון המורכב מסרט אינסופי המחולק לתאים בדידים. בתא הזיכרון יכול להיות כתוב הסימן 1 או שתא הזכרון ריק (הסימן 0). למרות שהזיכרון איננו מוגבל, בכל שלב משלבי החישוב יש רק מספר סופי של תאים לא ריקים.
2. מערכת בקרה שיש לה מספר סופי של מצבים, וכן טבלה סופית קבועה מראש ובה הוראות פעולה.

בכל שלב משלבי החישוב סוקרת מערכת הבקרה תא זיכרון אחד. כל ההוראות שלה חד משמעיות ויש להן הצורה הבאה: אם הבקרה נמצאת במצב מספר n וסוקרת סימן s שנה את הסימן ל- s' (ייתכן בהחלט כי s=s') עבור למצב n' (ייתכן בהחלט כי n=n') ועבור לתא מימין, או לתא משמאל, או עצור. לכל מצב n וסימן s ההוראה היא חד-משמעית ויחידה כך שמספר ההוראות הכולל הוא כמספר המצבים כפול מספר הסימנים. (יש כאמור רק שני סימנים 1, 0 = s). בתחילת החישוב כתובים על הסרט מספר סופי של אחדים (זהו הקלט). המכונה נמצאת על הסימן 1 הראשון משמאל במצב מספר 1 ומתחילה לבצע את ההוראות על פי הטבלה. החישוב מסתיים אם וכאשר המכונה נתקלת בהוראה עצור. סדרת האפסים והאחדים הכתובה אז על הסרט היא הפלט.

מכאן שמכונות טיורינג ממירות סדרות של אפסים ואחדים בסדרות של אפסים ואחדים על פי כללים קבועים מראש. כידוע כל מספר ניתן להכתב כסדרה של אפסים ואחדים, בכתיב בינארי, וגם כל שפה שיש בה מספר סימנים סופי (או אפילו בן מניה) ניתנת לקידוד לסדרות של אפסים ואחדים, כך שאין מדובר בהגבלה עקרונית. ברור

אפוא שמכונות טיורינג מתארות אלגוריתמים, המפתיע הוא שמכונה "פרימיטיבית" כגון זו יכולה לתאר כל אלגוריתם שהוא.

טיורינג הוסיף להגדרתו גם תובנה חדשה, זו המגולמת במכונה האוניברסלית. כיוון שכל מכונת טיורינג מאופיינת על ידי טבלת ההוראות שלה, שהיא סופית, הרי שגם אותה ניתן לקדד באמצעות אפסים ואחדים. המכונה האוניברסלית היא מכונת טיורינג לכל דבר (עם טבלת הוראות סופית וסרט כאמור). היא מקבלת כקלט קוד של מכונת טיורינג T כלשהי וכן (קוד של) קלט I כלשהוא ל-T, ומוציאה כפלט את התוצאה שהמכונה T היתה מחושבת בפעולתה על I . כלומר, המכונה האוניברסלית יכולה לבצע סימולציה של מכונת טיורינג כלשהי (אפילו של עצמה). טיורינג בנה במפורש טבלה למכונה אוניברסלית כזו. זוהי הדוגמה הראשונה בהיסטוריה למערכת הפעלה של מחשב (או, תחת תיאור אחר, לקומפיילר של שפת תכנות שהקוד שלו כתוב באותה שפת תכנות). ההבדל המהותי היחיד בין מחשב רגיל למכונת טיורינג אוניברסלית הוא בכך שלראשון יש, מסיבות מובנות, זיכרון מוגבל.

קשה להגזים בערכם של הפיתוחים הללו שהם מפיסגת ההישגים האנושיים בזמן כלשהו. עבודתם של טיורינג וחבריו עומדת ביסוד כל תעשיית המחשבים בכלל והתכנה בפרט. המעבר מן התיאוריה של שנות השלושים למימוש הטכנולוגי לקח פחות מעשרים שנה, זמן מהיר ביותר בכל קנה מידה. על חשיבותם של המחשבים במציאות האנושית העכשווית אין צורך להרחיב. זהו גם, ואולי בעיקר, הישג אינטלקטואלי. האירוניה היא שהדחף לכמה מן המחקרים בשנות השלושים, זה של טיורינג בפרט, הוא שלילי: להראות שאין אלגוריתם המכריע לגבי כל פסוק נתון בשפת האריתמטיקה אם הוא אמיתי או שקרי. ואמנם את זאת הראו באורח בלתי תלוי גם טיורינג וגם צ'רצ'.

כדי שנאמין לטענה זו, עלינו להיות משוכנעים שההגדרה של טיורינג (או אחת מן הרבות השקולות לה) אמנם מקיפה את כל מה שאנו אינטואיטיבית מוכנים לקבל כ״אלגוריתם״. זה תוכנה של התיזה של צ׳רצ׳-טיורינג: כל מה שהוא ניתן לחישוב, ניתן לחישוב באמצעות מכונת טיורינג. זוהי תיזה פילוסופית ולא משפט מתמטי במובן הרגיל. איננו יכולים להוכיח אותה במובן הפורמלי מפני שהיא מזהה מושג אינטואיטיבי ״ניתן לחישוב״ עם הגדרה מתמטית.

ישנן סיבות טובות להאמין שהתיזה הזו נכונה, ואמנם הצלחנו לאפיין סופית ובאופן מלא מהו חישוב ומהם גבולותיו. את הסיבות כבר הזכרנו. ראשית, ההגדרה אמנם מקיפה את עשרות אלפי האלגוריתמים שאנו מכירים ושום דוגמה נגדית לא נראית באופק. שנית, כל ההגדרות האלטרנטיביות לזו של טיורינג, ויש מאות רבות, נמצאו שקולות. מסיבות אלה יש לדעתי לקרוא לתיזה של צ׳רץ׳-טיורינג תגלית ולא המצאה, כמעט במובן של מדעי הטבע. נראה כי בהגדרותיהם תפסו טיורינג וחבריו את המהות של מושג החישוב.

ג. גבולות ההצרנה ומשפט גידל

אחד התפקידים החשובים של הלוגיקה, אם לא החשוב שבהם, הוא לאפיין את משפחת הטיעונים התקפים, כלומר את מושג ההוכחה. המאמצים לאפיון מושג זה התפתחו במקביל למאמצים לאפיון החישוביות, אולם לא תמיד עמדו החוקרים על הקשרים העדינים בין המושגים.

חלק מן המבנה של טיעונים תקפים נתגלה על ידי אריסטו ועל כך עמדנו. אולם משפחת הסילוגיזמים שהלוגיקה האריסטוטלית נשענת עליהם היא מצומצמת ואינה מקיפה את כל המקרים אותם אנו מכנים ״טיעון תקף״ אפילו במתמטיקה. בדוגמה אחת לכך

כבר נתקלנו מזווית אחרת, וזוהי הגיאומטריה האוקלידית. כל השיטה האכסיומטית של אוקלידס בנויה על הוכחת משפטים מתוך האקסיומות. מה הופך הוכחות אלה לטיעונים תקפים? הרי חלק הארי של ההוכחות האוקלידיות אינם סילוגיזמים, ואינם יכולים בעקרון להכתב כסילוגיזמים.[15] ודאי אנו חשים שההוכחות האוקלידיות הן תקפות, אבל מדוע?

תשובה אפשרית אחת היא שתוקף הטיעונים בגיאומטריה נובע מן הגיאומטריה עצמה, כלומר הכרתנו את תוכן המושגים הגיאומטריים מעבר ללוגיקה. זוהי כזכור תשובתו של קאנט שהרחבנו עליה את הדיבור בסעיף הראשון. ודאי אחת הסיבות שקאנט נזקק ל"אינטואיציה" כמקור לתוקף ההוכחות בגיאומטריה (ובהבחנה מפורשת מן הלוגיקה) היא בחולשתה של תורת ההיגיון האריסטוטלית. זו פשוט לא הספיקה כדי לתת דין וחשבון על תקפותה של השיטה האכסיומטית האוקלידית. האינטואיציה, אם כן, היא המלט שסותם את החורים שהשאירה הלוגיקה.[16]

התשובה הקאנטיאנית היא כמובן לא היחידה ואף לא המסתברת ביותר. קרוב לוודאי כי תוקף הטיעונים של אוקלידס בפרט, ובמתמטיקה בכלל, נובע מאקסיומות וכללי היסק לוגיים, בלתי תלויים בהיקשר הספציפי, ושעל טיבם לא עמדנו במודע. אולי דווקא בגלל שאנו משתמשים באקסיומות ובכללי היסק אלה שימוש מיידי, ללא השקעת מחשבה, הם שקופים בעינינו. התפתחותה של תורת ההגיון במאה וחמישים השנה האחרונות היא בכיוון זה. תחילה עם בול (Boole) באמצע המאה התשע-עשרה, שניסח חלק גדול מתחשיב הפסוקים, אחר כך עם פרגה (Frege) שפיתח את תחשיב היחסים וניתח את המשמעות של הכמתים.

גם כאן יש להבחין, כפי שעשה במפורש פרגה, בין לוגיקה לפסיכולוגיה. אין המטרה בהכרח לתת דין וחשבון על הדרך שבה בני אדם מסיקים מסקנות, או לנתח את

המנגנונים המשתתפים במחשבתם בפועל. השאלה לפנינו היא אפיסטמית: מהם הטיעונים התקפים, מהן האקסיומות וכללי ההיסק האמורים לבסס את תקפותן של הוכחות. איננו שואפים לתת דין וחשבון על האופן שבו הוכחות מומצאות, מבוצעות או נתפסות בתודעתינו. ייתכן כי דווקא ההתרחקות מן הפסיכולוגיה ומן האינטרוספקציה היא שאיפשרה את גילוי הכללים של תחשיב היחסים. הרי כל עוד התרכזנו באופן שבו אנו חושבים על בעיות, למשל בגיאומטריה, היינו שבויים בכבלי ההשקפה הגורסת שלמושגים כמו "אופן הסתכלות" ו"אינטואיציה" יש תפקיד מרכזי בהצדקת טיעונים. ישנו כמובן אפיון מיידי ואינטואיטיבי של טיעונים תקפים, אלו טיעונים המובילים בהכרח מהנחות אמיתיות למסקנות אמיתיות. לאפיון האינטואיטיבי הזה יש כידוע ביטוי בסמנטיקה של תחשיב היחסים, כלומר בתורת המודלים: הפסוק B הוא מסקנה תקפה מקבוצת הנחות Γ אם כל מודל של Γ מספק את B.

הקריטריון הסמנטי הוא טוב ויפה אלא שמלכתחילה לא ברור אם הוא מספק אינטואיציות אחרות שיש לנו על טיעונים תקפים, למשל את ההכרה שהוכחה נעשית בשלבים, כאשר כל צעד שקוף מבחינת תקפותו. אפריורי אולי ייתכן כי B היא מסקנה תקפה מ-Γ במובן הסמנטי, בעוד שלא קיימת שום סדרה סופית של היסקים שקופים ומובחנים המובילים מן ההנחות Γ למסקנה B.

התחביר של תחשיב הפרדיקטים מסדר ראשון בא לתת תשובה לשאלה זו ואחרות דוגמתה. מבחינה זו יש כאן דמיון רב למושג החישוב האינטואיטיבי והאנליזה שלו לשרשרת צעדים אלמנטריים על ידי טיורינג. במקרה שלפנינו האינטואיציה הקדם-אנליטית מגולמת בקריטריון הסמנטי לתקפות, בעוד ההצרנה בתחשיב היחסים היא האנליזה של המושג האינטואיטיבי למרכיבי היסוד שלו.

לא ניכנס לפרטי תחשיב היחסים שאני מניח כי הם נהירים לקורא. רק נחזור בקצרה על מושג ההוכחה הסינטקטי. בהנתן קבוצת פסוקים Γ ופסוק B, סדרה של פסוקים $A_1, A_2, ..., A_n$ נקראת "הוכחה של B מ- Γ" כאשר $A_n = B$ וכל אחד מאברי הסדרה A_i מקיים $A_i \in \Gamma$, או ש- A_i התקבל מן הקודמים לו בסדרה בעזרת אחד מכללי ההיסק.

תמיד אנו מניחים כי קבוצת האקסיומות Γ כוללת בתוכה את האקסיומות הלוגיות. כמו כן אנו מניחים שיש רק מספר סופי של כללי היסק המהווים את הצעדים האלמנטריים השקופים מבחינת תקפותם. ישנו חופש רב בבחירת האקסיומות הלוגיות וכללי ההיסק. בתחשיב היחסים מסדר ראשון בחירה נבונה מביאה למשפט שלמות, כך שהמושג הסמנטי של "טיעון תקף" והמושג הסינטקטי של "הוכחה" מתלכדים.[17]

נדגיש שוב את הנקודה החשובה לענייננו והיא שמושג ההוכחה בתחשיב היחסים הוא מושג סינטקטי. העובדה ש-B יכיח מתוך Γ איננה תלויה כלל במשמעות שאנו מייחסים לסימנים המיוחדים בשפת Γ. זוהי עובדה קומבינטורית התלויה אך ורק בתכונות של סדרת הסימנים המופיעים בנוסחאות ותו לא.

המהלך ההיסטורי שהביא לאנליזה הזו של מושג ההוכחה היה מורכב. לפחות חלק מן הדחף בא מן המאמץ להבין ולהצדיק מהלכים בגיאומטריה, במיוחד בפיתוח הגיאומטריות הלא אוקלידיות. כידוע במשך מאות שנים רווחה הסברה כי הפוסטולט החמישי של אוקלידס - אכסיומת המקבילים - איננה באמת אקסיומה, אלא משפט של ארבע הפוסטולטים האחרים. במהלך דורות ניתנו עשרות רבות של "הוכחות" שנמצאו בלתי מתאימות, לרוב מפני שהניחו את המבוקש. במאה התשע-עשרה הבשיל החשד כי הפוסטולט החמישי הוא בלתי תלוי בהנחות האחרות. אבל איך מוכיחים שמשהו בלתי

יכיח? בניגוד למקרה של חישוב כאן מספקת האינטואיציה הסמנטית תשובה מן המוכן: בונים מודל שבו מתקיימים ארבע הפוסטלטים הראשונים אבל החמישי נסתר. למשל מפרשים את המושגים "ישר" ו"מעגל" לא בפשר הרגיל שלהם אלא באמצעות עקומים (אוקלידיים) אחרים, שהיחסים ביניהם מספקים את ארבע האקסיומות ומכשילים את החמישית. לפרוצדורה הזו - הוכחה סמנטית לאי תלות - יש צידוק הנובע מעצם המשמעות של מסקנה תקפה, אבל היא מניחה במובלע שתי הנחות:

1. הפירוש של האובייקטים הלוגיים (קשרים, כמתים) הוא אינווריאנטי ובלתי תלוי במשמעות התכונות והיחסים עליהם מפעילים אותם.
2. מושג ההוכחה הוא אינווריאנטי ובלתי תלוי במשמעות התכונות והיחסים בשפה שבה מתרחשת ההוכחה.

כלומר, מניחים במובלע כי ההוכחה היא מושג לוגי. קאנט, למשל, היה מתנגד קרוב לודאי להנחה השניה, וייתכן שהיה מתנגד גם לרעיון שכללי השימוש בכמת הישי אינם תלויי הקשר. לעומת זאת, האנליזה הסינטקטית של מושג ההוכחה מספקת צידוק מיידי להוכחות סמנטיות לעקביות ולאי-תלות.

גם כאן אפשר לשאול, באנלוגיה לתיזה של צ'רצ'-טיורינג, האם מושג ההוכחה כפי שהוגדר מקיף את כל מה שאנו מכירים באופן אינטואיטיבי כהוכחה תקפה, לפחות במתמטיקה. הבה ננסח את התיזה באופן מפורש ונקרא לה התיזה הפורמליסטית: כל מה שהיא מסקנה תקפה מתוך קבוצת הנחות Γ יכיח מתוך Γ באופן פורמלי.

על פניה נראית התיזה נכונה כי הרי משפט השלמות מזהה בין המסקנות התקפות במובן הסמנטי לטענות היכיחות במובן הסינטקטי. לכאורה מדובר אפוא בענין סגור והדוק יותר אף מן התיזה של צ'רצ'-טיורינג. הבעיה היא שיכול להיות כי תחשיב היחסים עצמו, על הסינטקס והסמנטיקה שלו, אינם מספיקים להקיף כל מה שאנו

מקבלים אינטואיטיבית, כמסקנה תקפה מקבוצת הנחות. כלומר ייתכן כי ההצרנה הזו, על קירבה וכרעיה, מספקת רק תמונה חלקית, אפילו במתמטיקה.

נקדים את המאוחר ונאמר שהתיזה הפורמליסטית, בניגוד לתיזה של צ׳רץ-טיורינג, נכשלה. כל זאת איננו מגמד את ההישג הגדול של פרגה וממשיכיו. גם כיום לרוב המכריע של משפטי המתמטיקה אפשר לכתוב הוכחה, במובן שצוין לעיל, מתוך מערכת האקסיומות של תורת הקבוצות (ועל פי רוב מתוך הנחות חלשות יותר). הדוגמאות הנגדיות היחידות הידועות למושג ההוכחה הסינטקטי הרגיל הן אלה אשר נועדו למטרה זו, לשמש כדוגמאות נגדיות.[18]

כשלון ההצרנה של מושג ההוכחה היא מסקנה של משפט גידל (Gödel). השאלה שעמדה לנגד עיניו של גידל היתה הבאה: האם קיימת מערכת אקסיומות סבירה לאריתמטיקה שהיא שלמה? נזכור כי לגיאומטריה האוקלידית יש מערכת אקסיומות שלמה במובן שכל האמיתות (ורק האמיתות) של הגיאומטריה יכיחות ממנה. זוהי המערכת של הילברט שנזכרה לעיל. השאלה היא האם יש מערכת אקסיומות טובה כזו גם לאריתמטיקה. מהי מערכת אקסיומות ״סבירה״? גידל עמד רק על שלוש דרישות:

1. מערכת אקסיומות סבירה צריכה להיות עקבית.
2. המערכת צריכה לכלול, בין השאר, כמה אקסיומות בסיסיות המגדירות את פעולות החשבון הבסיסיות. נכנה קבוצת אקסיומות זו Γ_0, ונחזור לדון בה בסעיף הבא.
3. המערכת צריכה להיות ניתנת לזיהוי, כלומר יש אלגוריתם שבאמצעותו ניתן לזהות האם פסוק הנתון כקלט הוא (מקרה של) אקסיומה או לא.

נשים לב כי אין צורך ואף אי-אפשר לדרוש שהמערכת תהיה סופית. הרי אפילו משפחת האקסיומות הלוגיות לבדה היא אינסופית.[19] אבל כמובן יש לדרוש שתהיה שיטה

לזיהוי ההנחות שלנו בתור שכאלה. זוהי מהותה של הדרישה השלישית הנראית טבעית למדי.

משפט אי השלמות (הראשון) של גידל אומר שכל מערכת אקסיומות סבירה לאריתמטיקה היא בלתי שלמה. דהיינו, אם Γ מערכת אקסיומות סבירה לאריתמטיקה ישנו פסוק A בשפת Γ שלא הוא ואף לא שלילתו יכיחים מתוך Γ.

הוכחת משפט גידל היא קונסטרוקטיבית. בהינתן מערכת הנחות Γ כנ"ל, גידל מצביע בפירוש על פסוק כזה ומראה איך לבנות אותו.

עד כאן לא אמרנו דבר בהקשר הפורמליזציה של מושג ההוכחה. הניסוח לעיל, שהוא הניסוח המתמטי ה"טהור" של משפט אי השלמות לא נראה כקשור לענייננו. היקשר נוצר כאשר אנו שמים לב לדבר מה נוסף שאיננו מתמטי טהור: ישנו ארגומנט משכנע לכך שהפסוק A הוא אמיתי, אבל ארגומנט זה איננו ניתן לפורמליזציה כהוכחה מתוך Γ. הארגומנט הוא כדלקמן: לפסוק A יש הצורה $A = \forall x G(x)$ באשר $G(x)$ היא נוסחה במשתנה חפשי אחד בשפת האריתמטיקה.[20] בגלל אופי הבניה של הנוסחה G יש לה התכונה הזו: לכל מספר טבעי n בטענה $G(\mathbf{n})$ יכיחה מ Γ.[21] כך $G(\mathbf{0})$ יכיחה מ- Γ, $G(\mathbf{1})$ יכיחה מ- Γ, $G(\mathbf{100})$ יכיחה מ- Γ וכדו'. אבל, כאמור, הטענה הכוללת $\forall x G(x)$ איננה יכיחה מ- Γ. הסיבה לכך שתופעה כזו אפשרית היא בכך שלכל אחד מן המקרים $G(\mathbf{n})$ יש הוכחה שונה מאשר למקרים האחרים, ואי אפשר "לאסוף" את כל ההוכחות השונות - שאורכן הולך וגדל בקצב מפחיד עם גידול n - להוכחה אחת של הטענה הכוללת $\forall x G(x)$. כי הרי הוכחה של פסוק היא סדרה סופית של טענות.

כך למרות שאין הוכחה פורמלית לטענה $\forall xG(x)$ מתוך Γ אנו יכולים לזהות את אמיתותה של טענה זו, מפני שאנו יודעים (מתוך הבניה) כי לכל מספר n הטענה **G(n)** אמיתית.

ניתן כמובן לחזק את קבוצת ההנחות Γ על ידי הוספת A כאקסיומה. אבל אז תיווצר קבוצת אקסיומות סבירה חדשה Γ' שלגביה אפשר לחזור על התהליך כולו, וכך הלאה ללא גבול. באופן כזה אנו מקבלים דוגמה נגדית לתיזה הפורמליסטית: לכל מערכת אקסיומות סבירה של האריתמטיקה Γ יש פסוק A, שהוא איננו יכיח פורמלית מ- Γ, אבל אנו מזהים אותו אינטואיטיבית כמסקנה תקפה מקבוצת האקסיומות .

כבר שנים רבות לפני פרסום עבודתו של גידל ביטאו ראסל ווייטהד ספקנות ביחס לשלמות מערכת ההיסק של תחשיב היחסים (שהם, כידוע, נתנו לו את צורתו המודרנית). הם אומרים: "ביחס [לשלמות המערכת] תמיד ישאר יסוד לספקנות, כי אין ודאות גמורה שאיננו משתמשים בעקרון היסק באופן בלתי מודע. ההצרנה של מערכת במסגרת חוקים פורמליים היא חומת מגן כנגד אפשרות כזו אבל לא חומה מושלמת".[22] מסתבר כי מאי השלמות הזו אי אפשר להיפטר.

חוקרים רבים, מהם בעלי דעות קוטביות, הבינו כי משפט גידל איננו רק "מתמטיקה טהורה" אלא שיש לו מסקנות פילוסופיות ביחס לגבולות ההצרנה. כך טרסקי במאמר חשוב כבר בשנות השלושים,[23] וכך קוויין בספר הלוגיקה שלו: "הצרנה מלאה של האמת הלוגית, המשלבת בתוכה את יכולת הזיהוי של אמת זו, ולו במובן מופשט, אינה בהישג יד. עלינו להסתפק במושג זה או אחר של מסקנה דדוקטיבית (theoremhood) אשר כולל תת קבוצה חשובה של אמיתות לוגיות".[24] אך בעניין זה הרחיק לכת מכולם דאמט:

> הוכחה או בניה מתמטית הם במהותם יצורים מנטליים, משהו שאפשר אולי **ליצג** כצירוף של סמלים על ניר, אך אינו יכול להיות **מזוהה** אתו. התיזה הזו איננה מכוונת רק כנגד פורמליזם שטחי שאיננו מביא בחשבון כלל את המשמעות שאנו מייחסים לסימנים, זוהי דחייה של עצם הרעיון שיכולה להיות שקילות בין משפחת כל ההוכחות האפשריות בתורה מתמטית נתונה ובין קבוצת מבנים סימבוליים מאופיינת מראש, כלומר הוכחות פורמליות. השפה האינטואיציוניסטית בהיקשר זה מרתיעה, ובצדק, את כל מי שהפנים את ביקורתו של פרגה על ה"פסיכולוגיזם", הכנסת מושגים פסיכולוגיים לתוך הלוגיקה והמתמטיקה. אבל כאשר מפשיטים את הגישה האינטואיציוניסטית מן המסכה הפסיכולוגית היא מתגלה כמוצדקת לחלוטין. התפיסה האינטואיטיבית של הוכחה מתמטית תקפה, ואפילו בתוך תורה מצומצמת, בדרך כלל איננה זהה עם מושג ההוכחה במערכת פורמלית כלשהי. כי אפשרי בהחלט ששום מערכת פורמלית לא תצליח לעולם לגלם את כל עקרונות ההוכחה העשויים להתקבל על דעתנו. וזהו בדיוק המצב בתורת המספרים, כפי שמראה משפט גידל. במקרה זה משפחת ההוכחות שאנו מקבלים כתקפות אינטואיטיבית ניתנת להרחבה ללא כל גבול.[25]

נראה כאילו נסגר מעגל.

ד. גבולות החישוב וגבולות ההצרנה

ישנו כמובן קשר הדוק בין גבולות החישוב - התיזה ש/ל צ'רץ'-טיורינג - לבין כשלון ההצרנה של מושג ההוכחה. היבט אחד של הקשר הזה הוא מיידי וכבר עמדנו עליו. הזכרנו שלכל מערכת אקסיומות סבירה לאריתמטיקה יש התכונה שניתן לזהות אפקטיבית האם פסוק נתון משתייך אליה או לא. כלומר, קיים אלגוריתם המאפשר

זיהוי זה. התיזה של צ׳רץ׳-טיורינג היא הנותנת פשר מדויק למושג האלגוריתם, ועוזרת על כן לאפיין מהי מערכת אקסיומות סבירה.

אולם מקורו של הקשר בין חישוב להוכחה הוא עמוק יותר. עיקרו בכך שמשפטי גידל הם בעצם משפטים על אודות סיבוכיות חישובית. כנקודת מוצא להסברת עובדה זו נשוב לעבודתו של טיורינג. כחלק מאפיון גבולות החישוב נתן טיורינג גם דוגמה פשוטה לשאלה שאיננה ניתנת להכרעה באמצעות אלגוריתם. זוהי שאלה הנסובה על אודות אלגוריתמים ונקראת בעית העצירה: האם קיים אלגוריתם (מכונת טיורינג) אשר בהנתן לו (קוד של) טבלה של מכונת טיורינג T כקלט, יחשב האם המכונה T תעצור על הקלט 1?

נזכיר כי מכונת טיורינג עוצרת כאשר היא נתקלת בהוראה ״עצור״. על כן, השאלה היא האם מכונה T, המתחילה מן הקלט 1, תגיע במהלך החישוב להוראת עצירה ותעמוד. לגבי מכונות מסוימות זו שאלה קלה, אולם טיורינג הראה שאין שיטה כללית אשר תכריע שאלה זו לגבי כל מכונה.[26] אפשר לומר, אם כן, כי בעית העצירה היא מסובכת יותר מכל אלגוריתם אפשרי.

טיורינג כזכור שאף להוכיח כי אין אלגוריתם המכריע האם פסוק נתון בשפת האריתמטיקה אמיתי או שקרי. הדרך הטבעית לממש הוכחה כזו הוא לנסות ולנסח את בעיית העצירה, או בעיה אנלוגית לה, בתוך תורת המספרים המוצרנת. את הצעד המשמעותי בכיוון זה עשה גידל, שעבודתו קדמה לזו של טיורינג.

את תורת המספרים נהוג להצרין באמצעות הסימנים המיוחדים האלה: סימן לספרה 0, סימן לפונקציית העוקב S (כן ש- S (0) הוא הסימן שלנו ל- 1, S (S(0)) הספרה 2 וכד׳) סימן לפעולת החיבור + ולפעולת הכפל •.

על אלה נוספים, כמובן, כל הסימנים הרגילים של הלוגיקה (בכלל זה יחס השוויון =).
מערכת אקסיומות מינימלית - לא שלמה כמובן - לתורה זו מכילה מספר קטן של פסוקים המיסדים את היקשר בין הפונקציות השונות. למשל "לכל מספר יש עוקב": $\forall x \exists y (y = S(x))$, או הקשר בין שלוש הפונקציות הניתן על ידי הפסוק: $\forall x \forall y (x \bullet S(y) = x \bullet y + x)$. את מערכת האקסיומות הבסיסיות המכילה אקסיומות אלה וכמה אחרות הזכרנו בסעיף הקודם וכינינו אותה Γ_0.[27] לב ליבם של כל משפטי גידל, טיורינג וצ'רץ היא התוצאה הבאה:

משפט הייצוג: לכל פונקציה הניתנת לחישוב במכונת טיורינג ישנה נוסחה בשפת האריתמטיקה המיצגת פונקציה זו. יתר על כן, את העובדה שהנוסחה אמנם מיצגת נאמנה את הפונקציה ניתן להוכיח פורמלית מתוך קבוצת האקסיומות Γ_0.

זהו משפט עמוק וכדי לעמוד על טיבו ניקח דוגמה, הפונקציה $m = 2^n$. משפט הייצוג טוען שיש נוסחה בשפת האריתמטיקה *E(x,y)*, בעלת שני משתנים חפשיים המקיימת את התנאים האלה לכל שני מספרים טבעיים *m, n*: אם היחס $m = 2^n$ מתקיים אז ***E(m,n)*** יכיח מתוך Γ_0, ואם היחס $m \neq 2^n$ מתקיים אז ***~E(m,n)*** יכיח מ- Γ_0. (כזכור ***m, n*** הם הסמלים בשפה האמורה למספרים הטבעיים *m, n*).

כאמור, השפה שלנו כוללת רק סימנים לעוקב, לחיבור ולכפל. אם תנסו לכתוב נוסחה *E(x,y)* כזו קרוב לוודאי כי הרעיון שיעלה בראשכם הוא שחזקה היא "כפל מתמשך". אבל רעיון זה כפשוטו לא יביא אתכם רחוק, כי הרי נוסחה בתחשיב היחסים היא יצור קבוע וסופי. כדי לבצע את האינדוקציה בהגדרת חזקה ככפל מתמשך, נעשה שימוש מתוחכם בכמתים. פונקצית החזקה היא כמובן דוגמה אחת, משפט היצוג חל על כל פונקציה ניתנת לחישוב על ידי אלגוריתם כלשהו. זהו בעיקרו הכוח של הכמתים,

הנותן לשפה פשוטה כל כך למראית עין יכולת הבעה של שפת תכנות המאפשרת לנסח כל אלגוריתם.[28]

משפט הייצוג מאפשר לתרגם טענות אנלוגיות לבעיית העצירה לשפת האריתמטיקה, כלומר טענות שאמיתותן איננה ניתנת להכרעה על ידי אף אלגוריתם. כך מוכחת הטענה של צ׳רץ-טיורינג על אי הכריעות של האריתמטיקה. באופן דומה מאד ניתן לנסח טענות שאינן ניתנות להוכחה (או להפרכה) פורמלית וכך מוכח משפט גידל. המעבר ממשפט הייצוג (שהוכחתו ארוכה ומסובכת) לכל שאר התוצאות איננו מורכב.

כדי לתת חיזוק נוסף לטענה שמשפטי גידל נסובים בעצם על הסיבוכיות החישובית של שפת האריתמטיקה, אפשר לשאול מה קורה כאשר מדללים שפה זו. למשל, כאשר מוציאים את הסימן לפונקציית הכפל (והאקסיומות המתאימות לה) נשארת ״תורת החיבור״ הנקראת גם ״האריתמטיקה של פרסבורגר״. לאריתמטיקה של פרסבורגר יש אכסיומטיזציה שלמה, והיא כריעה, כלומר ישנו אלגוריתם המכריע אם פסוק נתון בשפה זו אמיתי או לא. תוספת סימן פונקציה אחד ומספר אקסיומות מעלה את הסיבוך הקומבינטורי של השפה מעבר לכל אלגוריתם אפשרי.

כל זה נכון, כמובן, בתנאי שהתיזה של צ׳רץ-טיורינג תקפה. במילים אחרות, מסקנתנו כי המושג האינטואיטיבי של ״הוכחה תקפה״ אינו ניתן להצרנה מתבססת על התיזה של צ׳רץ-טיורינג, היינו שהמושג האינטואיטיבי ״חישוב״ כן ניתן לאפיון אחת ולתמיד.

במילים אחרות, אם בעתיד תופרך התיזה של צ׳רץ, ותשתנה ההבנה של מושג האלגוריתם, יש לצפות להתרחשותו של שינוי מקביל במושגים כמו ״הוכחה״ ״כלל היסק״, ואפילו ״שפה פורמלית״. בקיצור, המשחק נפתח מחדש.

כדי לתת המחשה קונקרטית לעניין זה נתאר לעצמנו כי אפשר יהיה בעתיד להפוך את הרעיון העמום, הספק קוהרנטי הבא למושג מוגדר היטב. נתאר לעצמנו מחשב המסוגל

להכריע אמיתות כל טענה מהטיפוס $\forall xG(x)$ על ידי בדיקת המקרה הראשון G(**1**) בחצי שניה, המקרה השני, G(**2**) ברבע שניה נוספת, השלישי G(**3**) בשמינית שניה וכו׳. אם בשלב מסוים אחרי n צעדים נמצא דוגמה נגדית, ~G(**n**), המחשב עוצר אחרי $1\!-\!2^{-n}$ שניות ומכריז ״ לא״. אחרת, הוא עוצר אחרי שניה תמימה ואומר ״כן״.

הבעיה עם ״מחשב״ כזה איננה נעוצה בהכרח באפשרות המימוש הפיסיקאלי.[29] הרי כלל לא ברור מה משמעות ה״מיצוי של סדרת הטבעיים כולה״. מבחינה זו הרעיון נתקל בקשיים דומים לאלה שבהם נתקלים בגירסאות אחרות של פרדוקס זנון. למשל: נורה הדולקת בחצי השנייה הראשונה, כבויה ברבע השנייה אחריה, דולקת בשמינית השנייה שאחריה, וכו׳, האם הנורה תהיה כבויה או דולקת אחרי שנייה תמימה?

נניח כי התגברנו על הבעיה הקונצפטואלית הזו, והצלחנו להפוך את ה״מחשב״ האינסופי האמור לרעיון קוהרנטי (ואולי אפילו לבנות דגם שלו). ברור אז שכל פסוק מן הסוג $\forall xG(x)$ הופך מני ובי לפסוק הניתן להכרעה. ברור גם כי קבוצות פסוקים שכרגע אין אנו רואים אותם כמערכת אקסיומות סבירה ייהפכו למערכת סבירה. יתר על כן, המושג של ״שפה פורמלית״ מן הסתם ישתנה. אולי, בהנתן ״מחשבים״ כאלה, ראוי לכלול במסגרת הנוסחאות הבנויות היטב גם ביטויים אינסופיים מסוימים?

גבולות הפורמליזציה משולבים אפוא במה שאנו תופסים כחישוב, הא בהא תליא. כיום מושג ההוכחה הוא פתוח והאינטואיציה נדמית חופשית מפני שגבולות החישוב נקבעו. רק כך, בנסיון הסיזיפי לעמוד על קשרים כאלה, ולנסח במדויק את המחוות של האינטואיציה, נוכל לתפוס את הכללים התקפים של המחשבה. את זאת הרי כבר למדנו מדיקארט.

האוניברסיטה העברית בירושלים

---

[1] עמנואל קאנט, 'ביקורת התבונה הטהורה' תרגום ש.ה. ברגמן ונ. רוטנשטרייך, ירושלים, מוסד ביאליק תשמ"ג, עמ' 357. קאנט מתייחס כאן להוכחה הסטנדרטית לטענה כי סכום הזוויות במשולש הוא 180^0.

[2] על נושא זה עמד בהרחבה פרידמן ונשוב אליו כאמור בקצרה בסעיף ג.

M. Friedman, *Kant and the Exact Sciences,* Cambridge Massachussetts, Harvard University Press, 1992.

[3] המהדורה השניה של 'ביקורת התבונה הטהורה' בה הופיעו שורות אלו פורסמה לראשונה ב- 1787. ספרו של דיקארט על הגיאומטריה פורסם ב- 1637.

[4] R. Descartes, *The Geometry of Rene Descartes (with a Facsimilie of the First Edition)* tr. D.E. Smith and M.L. Latham, New York, Dover, 1954, p.16.
בכל מקרה שבו לא מצוין אחרת התרגום הוא שלי.

[5] דיקארט עצמו לא השתמש במה שאנו מכנים היום 'קואורדינטות קרטזיות'.

[6] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry,* second rev. ed., Berkeley, University of California Press, 1951.
הוכחה קצרה ומודרנית נמצאת אצל:
P.J. Cohen, Decision Procedure for Real and p-Adic Fields, *Communications on Pure and Applied Mathematics 22,* 131-151 (1969)

[7] S. Gaukroger, *Cartesian Logic,* Oxford, Clarendon Press, 1989.

[8] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, tr. Leo Unger, La Salle, Illinois, 1971.

[9] דוגמה לכך היא ההנחה שבחיתוך בין ישר ומעגל ישנה נקודה המשותפת לשניהם. העניין נראה לנו כל כך ברור שאינו זקוק להצהרה מפורשת. בהנחה סמויה זו משתמש אוקלידס כבר במשפט הראשון שהוא מוכיח!

[10] אנו גם מקבלים בלי מאמץ נוסף את העובדה שנקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס שניים לאחד. טענה זו דורשת הוכחה נפרדת בשיטה האוקלידית.

[11] ראה ההפניות בהערה 6 .

[12] הכוונה למרחב וקטורי מעל חוג עם חילוק. הוספת אקסיומה נוספת, אכסיומת פָּפּוּס, הופכת את החוג לקומוטטיבי, כלומר לשדה. החיבור החשוב בנושא זה הוא של ארטין שגישתו אלגברית ופורמלית; ראה
E. Artin - *Geometric Algebra,* New York, John Wiley, 1957
ספר נגיש יותר הוא של בנט שגישתה היא גיאומטרית ומוחשי; ראה
M. K. Bennett - *Affine and Projective Geometry,* New York, John Wiley, 1995
על הגיאומטריות השונות בהיקשר רחב ניתן לקרוא בספרו של אברהם הלוי פרנקל מבוא למתמטיקה, כרך שני, חטיבה שלישית,רמת גן, מסדה 1954.

[13] הערתו של ליבניץ תורגמה ומצוטטת אצל:
B. Russell, *A History of Wertern Philosophy,* New York, Simon and Schuster, 1945, p.592

[14] A.M. Turing, On Compuable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Scosiety Ser* 2, 42, 430-465 (1936)
אכספוזיציה פשוטה לנושאים אלה מצויה בפרק השני בסיפרו של פנרוז; ראה
R. Penrose - *The Emperor's New Mind,* London, Vintage 1990.

[15] הסילוגיזמים האריסטוטליים עוסקים בפרדיקטים חד-מקומיים. לכל תורה עִקְבִית המנוסחת רק באמצעות פרדיקטים חד-מקומיים יש מודלים סופיים, כך שאי אפשר לכפות באמצעות תורה כזו אפילו את הטענה שבישר יש אינסוף נקודות. לשם כך צריך להשתמש בחילופי כמתים על יחס דו-מקומי, לפחות; ראה:
G.S. Boolos and R.C. Jeffrey - *Computability and Logic,* Cambridge, Cambridge University Press, 1974, chap.25

[16] ראה ההפניה בהערה 2.

[17] מבחינה מתמטית משפט השלמות הוא מעין "הפתעה". ההגדרה הסמנטית של מסקנה תקפה נעשה באמצעות כימות על מחלקת כל המודלים של Γ, שאין לה בדרך כלל אפיון

מתקבל על הדעת אפילו בתורת הקבוצות. על כן "הפלא" הוא שההגדרה המאד לא קונסטרוקטיבית הזו שקולה לקיומה של הוכחה סינטקטית סופית.

18 דוגמה לטענה אמיתית וטבעית שאינה יכיחה מן האקסיומות הסטנדרטיות לתורת המספרים (אקסיומות פֶּיאָנו) נמצאת אצל

J. Paris and L. Harrington - 'A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic' in J. Barwise (editor) *Handbook of Mathematical Logic,* Amsterdam, North Holland 1977

בתורת הקבוצות ידועות טענות טבעיות רבות שאינן ניתנות להכרעה מן האקסיומות הסטנדרטיות, אבל אין ארגומנט משכנע לכך שהן אמיתיות.

19 כך למשל האקסיומה $A \rightarrow A$ היא בעצם סכמה אינסופית, כי היא תקפה ללא קשר לטיבה של הנוסחה הבנויה היטב A אשר מציבים בתוכה, ויש מספר אינסופי של נוסחאות כאלה.

20 בכל התייחסות ל"שפת האריתמטיקה" אני כולל גם שפות שבהן הסימנים לפעולות החשבוניות אינם מופיעים כסימנים פרימיטיביים, בתנאי שהם ניתנים להגדרה באמצעות הסימנים של השפה האמורה.

21 כאן עבור כל מספר טבעי n הסימן $\boldsymbol{n}$ מציין את הסיפרה המתאימה לו בשפה הפורמלית.

22 A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica,* Second edition, Cambridge, Cambridge University Press, 1925, p. 90.

23 A. Tarski, "On the Concept of Logical Consepuence", (1936) reprinted in *Logic Sementics and Metamathematics,* Oxford, University Press 1956.

24 W. V. O. Quine, *Mathematical Logic,* second revised edition, New York, Harper and Row, 1949, p. 318

25 M. Dummett, "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem" (1969), repreinted in *Truth and other Enigmas*, Cambridge Mass., Harvard University Press, 1978

התיחסות למשפט גידל ומסקנותיו הפילוסופיות בהיקשר שונה מצויה אצל א"י פוזננסקי "על יסודות המתמטיקה", נדפס כנספח בספרו של י' בר-הלל 'הגיון לשון ושיטה', ספרית פועלים, 1971, עמ' 243-296.

26 כדי להבין עד כמה קשה בעיית העצירה נחשוב על אלגוריתם אשר לכל מספר זוגי בודק אם הוא סכום של שני ראשוניים. אם התשובה שלילית הוא עוצר, אם התשובה חיובית הוא עובר למספר הזוגי הבא ומתחיל שוב. נתחיל את המכונה מן המספר 4, ואז קל לראות שהאלגוריתם יעצור אך ורק אם השערת גולדבך שקרית.

27 מערכת כזו ובה שבע אקסיומות ניתנת למשל בספרם של בולוס וג'פרי (הנזכר בהערה 15) עמ' 158. שם המערכת מצוינת באות Q.

28 בהקשר זה מן הראוי להזכר בעמדתו הספקנית של פואנקרה ביחס ללוגיקה. טענתו הבסיסית היתה כי תחשיב היחסים מגניב מן הדלת האחורית את אכסיומת האינדוקציה, וזה איננו עיקרון לוגי. דבריו הכמעט נבואיים מצויים בספר

H.Poinearé, *Science and Method*, (1908) tr. F. Maitland, New York, Dover, 1952

29 מסתבר, למרבה ההפתעה, כי קיומו של מחשב כזה מתישב עם משוואות אינשטיין לתורת היחסות הכללית. ראה:

I. Pitowsky, The Physical Church's Thesis and Physical Camputational Complexity *IYUN 39,* 81-91 (1990)

J. Earman and D.J. Norton, ‘Forever is a day: Supertasks in Pitowsky and Malament Hogarth Spacetimes, *Philosophy of Science 60,* 1-42 (1993)
I. Pitowsky - Laplace’s Demon Consults and Oracle - The Computational Complexity of Prediction, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics 27,* 161-180 (1996).